

实验 9 用三线摆测物体的转动惯量

转动惯量是物体转动时惯性大小的量度. 它与物体的质量、质量分布、几何形状和转轴的位置有关. 对于形状复杂或不规则的物体, 很难用数学的方法计算出它的转动惯量. 必须用实验方法来测定. 本实验介绍测定物体转动惯量的一种方法.

[目的]

1. 学会用三线摆测物体的转动惯量.
2. 验证转动惯量的平行轴定理.

[原理]

(一) 测悬盘绕中心轴转动时的转动惯量 J_0



图 9-1

1. 三线摆支架 2. 悬线固定螺钉 3. 上圆盘 4. 悬线 5. 悬盘 6. 光电接收器支架
7. 光电门 8. J-T25 周期测定仪 9. 底脚螺钉 10. 三线摆底座

三线摆实验装置如图 9-1 所示. 当轻轻转动水平放置的半径为 r_0 的上圆盘时, 由于对称放置的三根悬线的张力作用, 下悬盘即以上下盘的中心连线 oo' 为轴(中心轴)作周期性的扭转. 三根悬线的长均为 l , 与悬盘的两个接点成等边三角形(如图 9-2 所示), 这个三角形的外接圆与盘有共同的圆心, 外接圆半径为 R , R 小于悬盘的几何半径 R_0 . 若悬线接点之间的

距离为 a , 由几何关系知 $R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.

如图 9-3 所示, 设悬线在 BA 位置时为平衡位置. 由于悬盘发生了最大角位移 θ_0 , 悬线移到了 BA_1 位置, 如图中虚线所示, 这时悬盘的重心升高 h . 取平衡位置的势能为

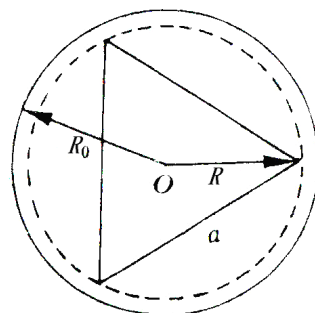


图 11-2 悬盘

零，而悬盘发生最大角位移 θ_0 时动能为零，如果忽略摩擦阻力和圆盘质心上下运动的平动能，由机械能守恒定律

$$m_0gh = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 \quad (9-1) \text{ 该页图号有错}$$

式中 m_0 为悬盘的质量， g 为重力加速度， J_0 和 ω_0 分别是悬盘的转动惯量和通过平衡位置时的角速度。若 θ_0 很小，可以证明悬盘将作简谐振动。根据简谐振动的规律，悬盘在任一时刻 t ，相对于平衡位置的角位移

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi\theta_0}{T_0}t + \phi\right)$$

T_0 是悬盘的振动周期， ϕ 为初相位。振动的角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

悬盘通过平衡位置时，角速度的最大值为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \theta_0 \quad (9-2)$$

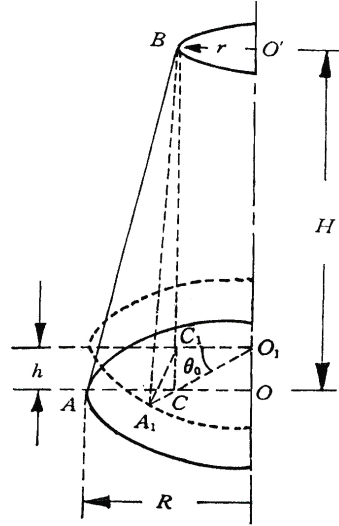


图 11-3

将 (9-2) 式代入 (9-1) 式中得

$$m_0gh = \frac{1}{2}J_0\left(\frac{2\pi}{T_0}\theta_0\right)^2$$

整理后得

$$J_0 = \frac{m_0gT_0^2}{2\pi^2\theta_0^2}h$$

由图 9-3 的几何关系得：

$$h = O_1O = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}$$

因为 $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R-r)^2$ 及 $(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta_0)$

得
$$h = \frac{2Rr(1 - \cos\theta_0)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\theta_0}{2}}{BC + BC_1}$$

在偏转角很小时，有

$$\sin\frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0}{2}$$

设 $OO' = H$ ，当 $l \gg R$ 时， $BC \approx BC_1 \approx H$ ，所以

$$h = \frac{Rr\theta_0^2}{2H}$$

将此式代入 (9-3) 式得

$$J_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H} T_0^2 \quad (9-4)$$

(二) 测圆环绕中心轴转动的转动惯量 J_1

把质量为 m_1 的圆环放在悬盘上, 使两者圆心重合, 组成一个系统. 测得它们绕 oo' 轴扭动的周期为 T_1 , 根据与 (9-4) 式相同的推导过程得这个系统的转动惯量

$$J = \frac{(m_0 + m_1) g R r}{4\pi^2 H} T_1^2 \quad (9-5)$$

圆环绕 oo' 轴的转动惯量

$$J_1 = J - J_0 \quad (9-6)$$

(三) 验证平行轴定理

设某刚体的质心通过轴线 oo' , 刚体绕这个轴线的转动惯量为 J_c , 如果将此刚体与其质心在转动平面内平移距离 d , 以后刚体对 OO 轴的转动惯量

$$J_c' = J_c + Md^2 \quad (9-7)$$

式中 M 为刚体的质量, d 为相对刚体来讲平移前后两平行的转轴之间的距离, 这个关系称为转动惯量的平行轴定理.

取下圆环, 将两个质量都为 m_2 的形状完全相同的圆柱体对称地放置在悬盘上, 圆柱体中心离 oo' 轴线的距离为 x . 测出两柱体与悬盘这个系统绕 oo' 轴扭动周期 T_2 . 则两柱体此时的转动惯量为

$$2J_2 = \frac{(m_0 + 2m_2) g R r}{4\pi^2 H} T_2^2 - J_0 \quad (9-8)$$

将 (9-8) 式所得的结果与 (9-7) 式计算出的理论值比较, 就可验证平行轴定理.

[装置介绍]

三线摆的结构参见图 9-1, 它的附件还有待测圆环、待测圆柱、水准仪等. 测量三线摆振动的周期可用周期测定仪或计时计数毫秒仪来测量, J-T25 周期测定仪光电门的激光器和光电接收器是连在一起的, 是利用下圆盘的挡光柱来回遮光来测定三线摆的周期, 测量准确度为 0.01s. FD-IM-II 型计时计数毫秒仪中计数装置的激光器和光电接收器是分开的, 先将激光器放到一个合适位置, 后调节激光器位置, 使其和光电接收器在同一水平线上, 打开电源, 将激光束调整到最佳位置, 即激光打到光电接收器的小孔上, 此时计时计数毫秒仪右上角的低电平指示灯状态为暗 (注意此时切勿直视激光光源). 利用摆线上的红色塑料套管来回遮光来测定三线摆的周期和全振动次数, 它的测量准确度为 0.001s.

[实验内容]

(一) 测悬盘对中心轴的转动惯量 J_0

1. 将水准仪放在三线摆的支架顶端, 调节底座螺钉使上支架和上圆盘水平. 再将水准仪放在悬盘中心, 调整悬线轴和悬线固定螺钉, 使 3 根悬线长度都为 l 且比悬盘半径大很多, 这时悬盘面应水平. 待悬盘静止时, 轻轻扭动上圆盘, 在最大转角不超过 5° 的条件下, 使悬盘扭动. 悬盘扭动时, 其质心只能上下移动, 如果质心有左右摆动就必须重新启动扭摆.

2. 用周期测定仪或计时计数毫秒仪测出 20 次全振动所需的时间, 重复 3 次, 计算出 $\overline{T_0}$.

3. 用游标卡尺测出上圆盘的直径 $2r$, 用米尺测出悬盘上悬线接点之间的距离 a 和上下盘之间的距离 H . 悬盘质量 m_0 由实验室给出, g 取理论值, 由 (9-4) 式计算悬盘转动惯量的实验值 J_0 .

4. 用米尺测量悬盘的几何直径 $2R_0$, 根据 $J_0' = \frac{1}{2} m_0 R_0^2$ 计算悬盘转动惯量的理论值, 以理论值 J_0' 为真值, 估算实验的误差和相对误差.

(二) 测定圆环对中心轴的转动惯量 J_1

1. 由实验室给出圆环的质量 m_1 , 用米尺测出圆环的内外几何直径 $2R_i$ 和 $2R_e$. 将圆环放到悬盘上, 并使二者的圆心重合.

2. 用周期测定仪或计时计数毫秒仪测出悬盘和圆环这个系统 20 次全振动所需的时间, 重复 3 次, 计算出 $\overline{T_1}$.

3. 由 (9-5) 式和 (9-6) 式计算圆环转动惯量的实验值 J_1 , 根据 $J_1' = \frac{m_1}{2} (R_i^2 + R_e^2)$ 计算圆环转动惯量的理论值, 以理论值 J_1' 为真值, 估算误差和相对误差.

(三) 验证平行轴定理

1. 将两个圆柱体 (三线摆的附件) 对称地放在悬盘上, 如图 9-5 所示, 两圆柱体中心的连线经过悬盘的圆心. 用游标卡尺测出两圆柱体中心距离 $2x$. 这两个圆柱体是完全相同的, 均匀分布的质量都为 m_2 (由实验室给出), 直径都为 $2R_x$ (用游标卡尺测出).

2. 用周期测定仪或计时计数毫秒仪测出悬盘和两个圆柱体这个系统 20 次全振动所需的时间, 重复 3 次, 计算出 $\overline{T_1}$.

3. 由 (9-8) 式计算每个圆柱体此时转动惯量的实验值 J_2 . 由平行轴定理 (9-7) 式计算此时圆柱体的理论值

$$J_2' = m_2 x^2 + \frac{1}{2} m_2 R_x^2 \quad (9-9)$$

以理论值 J_2' 为真值, 估算测量的误差和相对误差.

[数据表格]

表 9-1 用周期测定仪或计时计数毫秒仪测得的数据

单位: s

	悬盘		悬盘与圆环		悬盘与两圆柱体	
	1		1		1	
全振动 20 次所需时间	2		2		2	
	3		3		3	
	平均		平均		平均	
周期	$\overline{T_0}$		$\overline{T_1}$		$\overline{T_2}$	

表 9-2 用游标卡尺和米尺测得的数据

单位: cm

次数 \ 项目	上圆盘直径 $2r$	悬线接线点间距离 a	圆环 (米尺)		圆柱体直径 $2R_x$	两圆柱体之间的距离 $2x$
			外直径 $2R_i$	内直径 $2R_e$		
1						
2						
3						
平均	$\bar{r} =$	$\bar{a} =$	$\bar{R}_i =$	$\bar{R}_e =$	$\bar{R}_x =$	$\bar{x} =$

上下两圆盘垂直距离 $H =$ _____ m 悬盘 $m_0 =$ _____ kg 悬盘 $R_0 =$ _____ m

圆环 $m_1 =$ _____ kg 圆柱体质量 $m_2 =$ _____ kg

[思考题]

1. 如何利用三线摆测定任意形状的物体绕特定轴转动时的转动惯量?
2. 如果悬盘不在水平面内, 三线摆启动后会发生什么现象? 对周期的测量有何影响?
3. 加上待测物体后三线摆的扭动周期是否一定比空盘的扭动周期大? 为什么?